Оглавление

33. Равнобедренный треугольник
34. Равносильные уравнения
35. Равносторонний треугольник
36. Ромб
37. Скалярное произведение векторов
38. Среднее арифметическое, геометрическое
39. Средняя линия
40. Степень
41. Таблица значений тригонометрических функций
42. Теорема Виета
43. Теорема косинусов, синусов
44. Трапеция
45. Углы на плоскости
46. Формулы сокращенного умножения
47. Функция корень
48. Функция модуль
49. Хорда
50. Центральный, вписанный угол

1. Арифметическая прогрессия

Определение: Последовательность, у которой задан первый член **a_1**, а каждый следующий равен предыдущему, сложенному с одним и тем же числом **d**, называется арифметической прогрессией: **$a_{n+1} = a_n + d$,** где **d** – разность прогрессии.

$$a_n = a_1 + d(n-1) \qquad a_n = a_k + d(n-k)$$

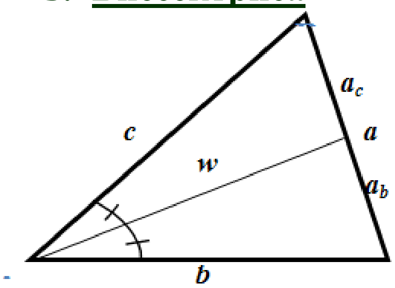
$$2a_n = a_{n-1} + a_{n+1} \qquad a_n + a_m = a_k + a_l, \text{ если } n+m = k+l$$

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2}n \qquad S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2}n$$

2. Арифметический квадратный корень

Определение	Формулы
Арифметическим квадратным корнем из неотрицательного числа a - ($\sqrt{a}$) - называется неотрицательное число, квадрат которого равен a.	• $(\sqrt{a})^2 = a$ • $\sqrt{a^2} = \lvert a\rvert$ • $\sqrt{a\cdot b} = \sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$ • $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$
Корнем k–ой степени из a (k - нечетное) называется число, k-ая степень которого равна a.	• $(\sqrt[k]{a})^k = a$ • $\sqrt[k]{a^k} = a$ • $\sqrt[k]{a\cdot b} = \sqrt[k]{a}\cdot\sqrt[k]{b}$ • $\sqrt[k]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[k]{a}}{\sqrt[k]{b}}$ • $(\sqrt[k]{a})^m = \sqrt[k]{a^m}$ • $\sqrt[k]{a} = a^{\frac{1}{k}}$

3. Биссектриса



$$w = \sqrt{b\cdot c - a_b\cdot a_c}$$

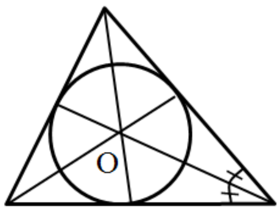
Биссектриса – отрезок, выходящий из вершины треугольника и делящий угол пополам.

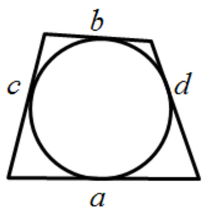
- Биссектриса делит противолежащую сторону на части , пропорциональные прилежащим сторонам: $a_b : a_c = b : c$
- Биссектриса делит площадь треугольника, пропорционально прилежащим сторонам.

4. Вписанная окружность

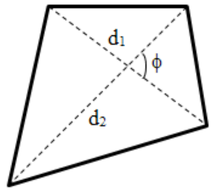
Центр окружности, вписанной в треугольник, лежит на пересечении биссектрис треугольника.

Если окружность вписана в произвольный четырехугольник, тогда попарные суммы противолежащих сторон равны между собой: ***$a + b = c + d$***





5. Выпуклый четырёхугольник



Произвольный выпуклый четырёхугольник:

- ✓ Сумма всех углов равна 360^0.
- ✓ Площадь: $S = \frac{1}{2} d_1 \cdot d_2 \cdot \sin \varphi$

6. Геометрическая прогрессия

Определение: Последовательность, у которой задан первый член $b_1 \neq 0$, а каждый следующий равен предыдущему, умноженному на одно и то же число $q \neq 0$, называется геометрической прогрессией:

$b_{n+1} = b_n q$, где q – знаменатель прогрессии.

$b_n = b_1 q^{n-1}$ $\quad$ $b_n = b_k q^{n-k}$

$b_n^2 = b_{n-1} b_{n+1}$ $\quad$ $b_n b_m = b_k b_l$, *если* $n + m = k + l$

$S_n = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q}$

Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия

$S = \frac{b_1}{1-q}$

7. Деление с остатком

Формула деления с остатком: $n = m \cdot k + r$,

где n – делимое, m - делитель, k - частное, r – остаток: $0 \leq r < m$

Любое число можно представить в виде:

$n = 2k + r$, где $r = \{0; 1\}$

или $n = 4k + r$, где $r = \{0; 1; 2; 3\}$

8. Делимость натуральных чисел

Пусть $n : m = k$, где n, m, k – натуральные числа.

Тогда m – делитель числа n, а n – кратно числу m.

Число n называется простым, если его делителями являются только единица и само число n.

Множество простых чисел: *{2; 3; 5; 7; 11; 13; . . .; 41; 43; 47 и т.д.}*

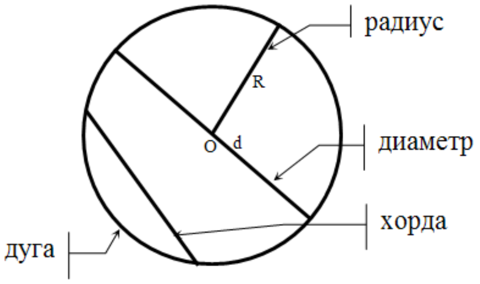
Числа n и m называются взаимно простыми, если у них нет общих делителей, кроме единицы.

9. Десятичные числа

Стандартный вид: $317{,}3 = 3{,}173 \cdot 10^2$; $\quad$ $0{,}00003173 = 3{,}173 \cdot 10^{-5}$

Форма записи: $3173 = 3 \cdot 1000 + 1 \cdot 100 + 7 \cdot 10 + 3$

10. Длина окружности, площадь



Длина окружности: $l=\pi\cdot d=2\pi\cdot R$

Площадь круга: $S=\pi\cdot R^2$

11. Дроби

Сложение $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d+c\cdot b}{b\cdot d}$

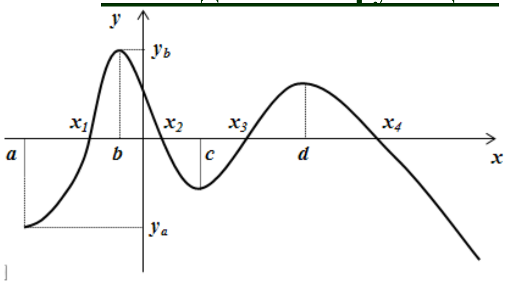
Вычитание $\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d-c\cdot b}{b\cdot d}$

Умножение $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}$

Деление $\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}$

Составная дробь $m\frac{a}{b}=\frac{m\cdot b+a}{b}$

12. Исследование функции



Область определения: $D(f): x\in[a;\infty)$

Множество значений: $E(f): y\in(-\infty; y_b]$

Корни функции: $f(x)=0 \Rightarrow x\in\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$

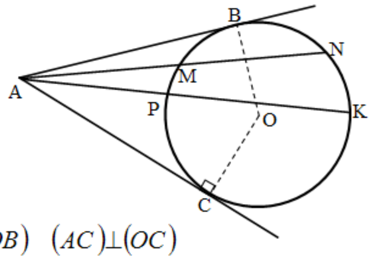
Критические точки $x\in\{b,d\}$; $x=c$

Промежутки возрастания: $x\in[a,b]\cup[c,d]$

Промежутки убывания: $x\in[b,c]\cup[d,\infty)$

13. Касательная, секущая

Касательная – прямая, имеющая с окружностью одну общую точку.
Секущая – прямая, имеющая с окружностью две общие точки.



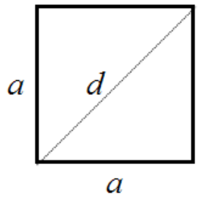
$(AB)\perp(OB)\quad (AC)\perp(OC)$

$|AB| = |AC|$

$|AM|\cdot|AN| = |AP|\cdot|AK| = |AB|^2$

14. Квадрат

Прямоугольник, у которого все стороны равны, называется квадратом.



Диагональ квадрата $d = a\sqrt{2}$

Площадь: $S = a^2 = \frac{1}{2}d^2$

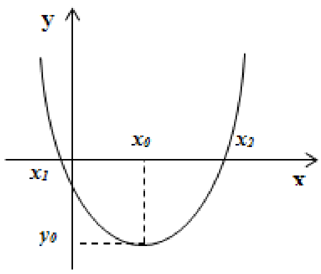
15. Квадратная функция

$\boldsymbol{y = ax^2 + bx + c}$,

$\boldsymbol{D = b^2 - 4ac}$ - дискриминант

$M(x_0, y_0)$ – вершина параболы:

$x_0 = -\frac{b}{2a}$

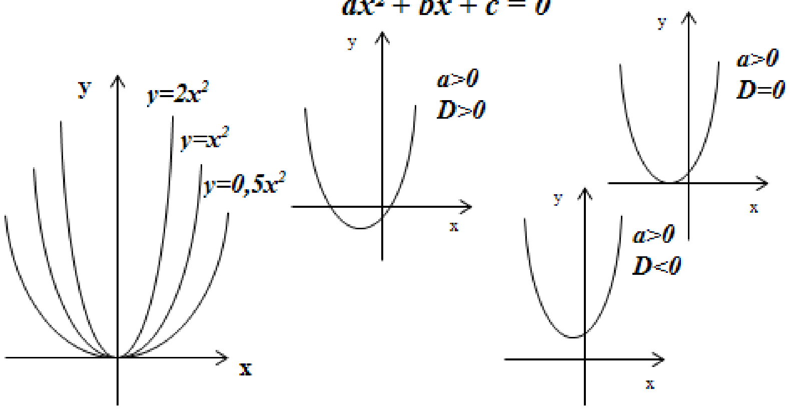


Уравнение параболы, проходящей через точку M:

$\boldsymbol{y = a(x - x_0)^2 + y_0}$

$\boldsymbol{x_1, x_2}$ – корни параболы:

$\boldsymbol{ax^2 + bx + c = 0}$



16. Квадратное уравнение

$ax^2 + bx + c = 0$

Дискриминант: $D = b^2 - 4ac$

Если $D < 0$ то уравнение не имеет корней $x \in \varnothing$

Если $D = 0$ то уравнение имеет один корень x_1

Если $D > 0$ то уравнение имеет два корня $x_1; x_2$

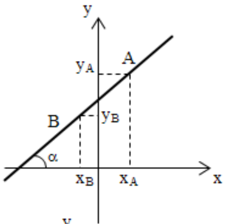
Формула корней: $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$

Разложение на линейные множители:

$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$

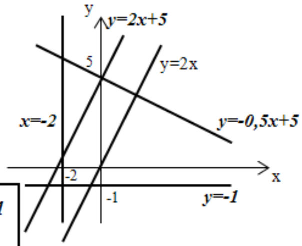
17. Линейная функция

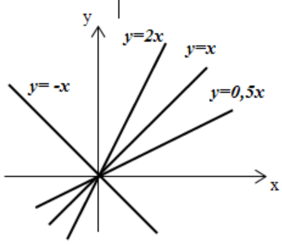
y* = *kx* + *b*,** ***k – угловой коэффициент, ***b*** – свободный член



$$k = tg\,\alpha$$

$$\frac{y - y_A}{y_B - y_A} = \frac{x - x_A}{x_B - x_A}$$





Пусть $y_1 = k_1x + b_1$ и $y_2 = k_2x + b_2$.

Тогда:

$$y_1 \parallel y_2 \Rightarrow k_1 = k_2$$

$$y_1 \perp y_2 \Rightarrow k_1 = -\frac{1}{k_2}$$

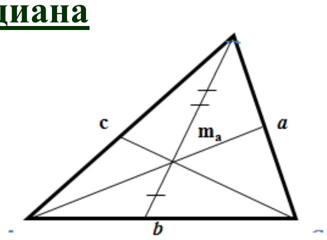
18. Линейное уравнение:

$ax + b = 0 \ (a \neq 0) \quad \Leftrightarrow \quad x = -\dfrac{b}{a}$

Если $a = 0$ и $b \neq 0$ то уравнение не имеет решений $x \in \varnothing$

Если $a = 0$ и $b = 0$ то уравнение имеет бесконечно много решений $x \in R$

19. Медиана

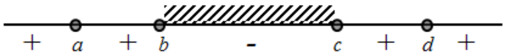


Медиана – отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противоположной стороны.

- Медианы треугольника точкой их пересечения делятся в отношении 2:1 (считая от вершины треугольника).
- Медиана делит треугольник на два треугольника с равными площадями.
- $m_a = \dfrac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$ $\qquad a = \dfrac{2}{3}\sqrt{2(m_b^2 + m_c^2) - m_a^2}$

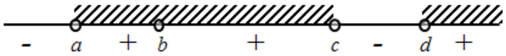
20. Метод интервалов

1) $(x-a)^2(x-b)(x-c)^3(x-d)^4 \le 0$



$\Rightarrow x \in \{a\} \cup [b;c] \cup \{d\}$

2) $(x-a)(x-b)^2(x-c)(x-d) > 0$



$\Rightarrow x \in (a;b) \cup (b;c) \cup (d;\infty)$

21. Модуль: уравнения и неравенства

1. a) $|f(x)| = k \quad (k > 0) \Rightarrow f(x) = \pm k$

   b) $|f(x)| = 0 \Rightarrow f(x) = 0$

   c) $|f(x)| = -k \; (k > 0) \Rightarrow x \in \varnothing$

2. $|f(x)| = f(x) \Leftrightarrow f(x) \ge 0$

   $|f(x)| = -f(x) \Leftrightarrow f(x) \le 0$

3. $|f(x)| + af^2(x) = k \Rightarrow |f(x)| + a|f(x)|^2 = k \quad$ *Замена* $: y = |f(x)| \Rightarrow y + ay^2 = k$

4. $|f(x)| = |g(x)| \;\Rightarrow f^2(x) = g^2(x) \Rightarrow \big(f(x) - g(x)\big)\cdot\big(f(x) + g(x)\big) = 0$

5. $|f(x)| < k \;\Rightarrow f^2(x) < k^2 \Rightarrow \big(f(x) - k\big)\cdot\big(f(x) + k\big) < 0$

22. Модуль

Определение	Формулы	
$\lvert x\rvert = \left[\begin{array}{l} x, \text{ если } x \ge 0 \\ -x, \text{ если } x < 0 \end{array}\right.$	• $\lvert x\rvert \ge 0$	• $\lvert x - y\rvert \ge \lvert x\rvert - \lvert y\rvert$
	• $\lvert -x\rvert = \lvert x\rvert$	• $\lvert x \cdot y\rvert = \lvert x\rvert \cdot \lvert y\rvert$
	• $\lvert x\rvert \ge x$	• $\lvert x : y\rvert = \lvert x\rvert : \lvert y\rvert$
	• $\lvert x + y\rvert \le \lvert x\rvert + \lvert y\rvert$	• $\lvert x\rvert^2 = x^2$

23. Неравенства

Определения:

Неравенством называется выражение вида:

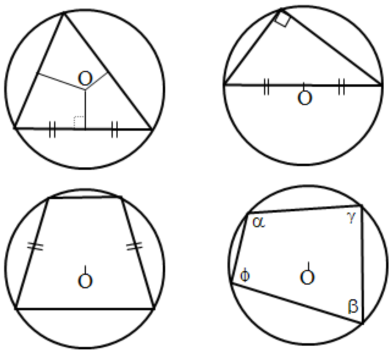
a < b (a ≤ b),   a > b (a ≥ b)

$a \le b \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a < b \\ a = b \end{array}\right.$

Основные свойства:

$a < b \Leftrightarrow b > a$	$a < b$ и $b < c \Leftrightarrow a < c$
$a < b \Leftrightarrow a + c < b + c$	$a < b$ и $c > 0 \Leftrightarrow ac < bc$
$a < b$ и $c < 0 \Leftrightarrow ac > bc$	$a < b$ и $c < d \Leftrightarrow a + c < b + d$

24. Описанная окружность



- Центр окружности, описанной около треугольника, лежит на пересечении серединных перпендикуляров к его трем сторонам.
- Центр окружности, описанной около прямоугольного треугольника, лежит на середине гипотенузы.
- Около трапеции можно описать окружность только тогда, когда трапеция равнобочная.
- Если окружность описана около произвольного четырехугольника, тогда попарные суммы противолежащих углов равны между собой: $\alpha+\beta=\phi+\gamma$

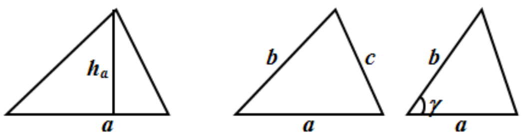
25. Периодическая дробь

$3{,}1737373\ldots=3{,}1(73)=\dfrac{3173-31}{990}$.

Правило: $ab{,}cde(fg)=\dfrac{abcdefg-abcde}{99000}$

26. Площадь треугольника

$S=\dfrac{1}{2}a\cdot h_a$ $\quad S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$



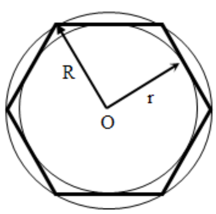
$S=\dfrac{1}{2}a\cdot b\cdot\sin\gamma$ $\quad S=\dfrac{abc}{4R}$ $\quad S=p\cdot r$

27. Правильный многоугольник

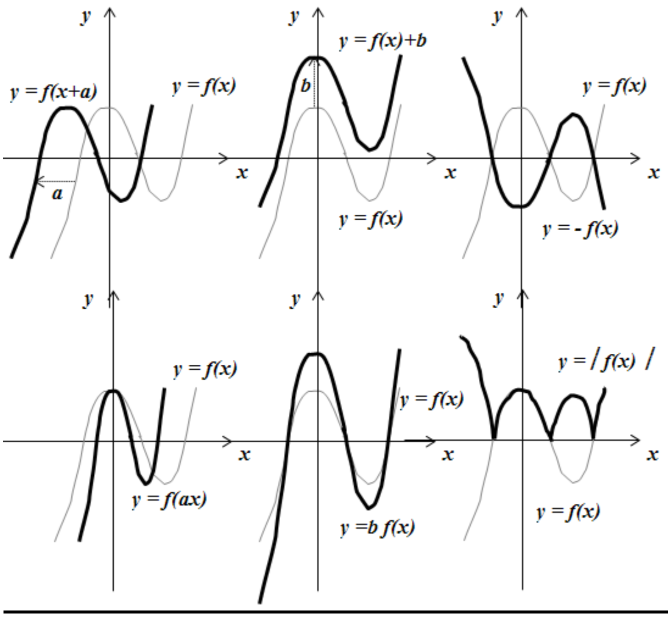
Правильным многоугольником называется многоугольник, у которого все стороны и углы равны между собой.

- ✓ Около всякого правильного многоугольника можно описать окружность и в него вписать окружность, причём центры этих окружностей совпадают.
- ✓ Сторона правильного n–угольника: $a_n=2R\sin\dfrac{180^0}{n}$

Площадь правильного n–угольника: $S_n=\dfrac{1}{2}P_n r$; $\quad S_n=\dfrac{1}{2}R^2\cdot n\cdot\sin\dfrac{360^0}{n}$



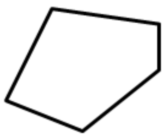
28.Преобразование графика функции



29.Произвольный выпуклый многоугольник

Формулы для многоугольников с числом сторон n = 3, 4, 6, 8, 12

n	α	r	R	S	Связь между r и R
3	60°	$\frac{a\sqrt{3}}{6}$	$\frac{a\sqrt{3}}{3}$	$\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$	$R = 2r$
4	90°	$\frac{a}{2}$	$\frac{a\sqrt{2}}{2}$	a^2	$R = r\sqrt{2}$
6	120°	$\frac{a\sqrt{3}}{2}$	a	$\frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$	$R\sqrt{3} = 2r$
8	135°	$\frac{a(1+\sqrt{2})}{2}$	$\frac{a\sqrt{4+2\sqrt{2}}}{2}$	$2a^2(1+\sqrt{2})$	$\frac{r}{R} = \cos\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$
12	150°	$\frac{a(2+\sqrt{3})}{2}$	$a\cdot\sqrt{2+\sqrt{3}}$	$3a^2(2+\sqrt{3})$	$\frac{r}{R} = \cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$



- ✓ Сумма всех углов равна $\pi(n-2)$ *или* $180^0(n-2)$
- ✓ Число диагоналей: $\frac{1}{2}n\cdot(n-3)$

30.Расстояние между точками

Расстояние между точками: $|AB|=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$

Координаты вектора: $\overrightarrow{AB}=(x_B-x_A;\, y_B-y_A)$

т. С - середина отрезка АВ: $x_C=\frac{x_A+x_B}{2}$ $\quad y_C=\frac{y_A+y_B}{2}$

Уравнение окружности: $(x-x_C)^2 + (y-y_C)^2=R^2$

31. Проценты

Процентом называется сотая часть от числа. ***1%A = 0,01A***

Основные типы задач на проценты:

Сколько процентов составляет число A от числа B?

B - 100%

A - x%

$$\Rightarrow \quad x = \frac{A}{B} \cdot 100\%$$

Сложные проценты.

Число A увеличилось на 20%, а затем полученное число уменьшили на 25%. Как, в итоге, изменилось исходное число?

1) $A_1 = (100\% + 20\%)A = 120\%A = 1{,}2A$
2) $A_2 = (100\% - 25\%)A_1 = 75\%A_1 = 0{,}75A_1 = 0{,}75 \cdot 1{,}2A = 0{,}9A = 90\%A$
3) $A_1 - A = 90\%A - 100\%A = -10\%A$

$\Rightarrow$ Ответ: уменьшилось на 10%.

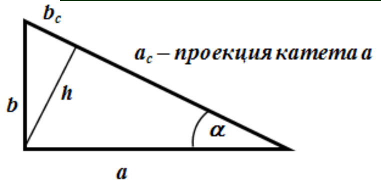
Изменение величины.

Как изменится время, если скорость движения увеличится на 25%?

$$t = \frac{S}{v} \Rightarrow t_1 = \frac{S}{v_1} = \frac{S}{1{,}25v} = \frac{1}{1{,}25}\frac{S}{v} = 0{,}8\frac{S}{v} = 80\%t$$

$\Rightarrow$ Ответ: уменьшится на 20%

32. Прямоугольный треугольник

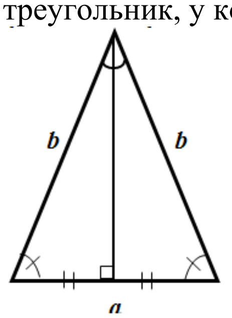


- ❖ Теорема Пифагора: $c^2 = a^2 + b^2$ Площадь: $S = \frac{1}{2} a \cdot b$
- ❖ Тригонометрические соотношения: $\cos\alpha = \frac{a}{c}$; $\sin\alpha = \frac{b}{c}$; $tg\alpha = \frac{b}{a}$
- ❖ Центр описанной окружности лежит на середине гипотенузы.
- ❖ Радиусы окружностей: $r = \frac{a+b-c}{2}$; $R = \frac{c}{2}$
- ❖ Высота, опущенная на гипотенузу: $h = \sqrt{a_c \cdot b_c} = \frac{a \cdot b}{c}$; $\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a_c}{b_c}$

Катеты: $a = \sqrt{a_c \cdot c}$; $b = \sqrt{b_c \cdot c}$

33. Равнобедренный треугольник

треугольник, у которого две стороны равны.



- ❖ Углы, при основании треугольника, равны
- ❖ Высота, проведенная из вершины, является биссектрисой и медианой.

34. Равносильные уравнения

Исходное уравнение		Равносильное уравнение (система)
$f(x)=g(x)$	$\Leftrightarrow$	$f(x)+C=g(x)+C$
$f(x)\cdot g(x)=0$	$\Leftrightarrow$	$\left[\begin{array}{l} f(x)=0 \\ g(x)=0 \end{array}\right.$
$\dfrac{f(x)}{g(x)}=0$	$\Leftrightarrow$	$\begin{cases} f(x)=0 \\ g(x)\neq 0 \end{cases}$
$f^2(x)+g^2(x)=0$	$\Leftrightarrow$	$\begin{cases} f(x)=0 \\ g(x)=0 \end{cases}$

35. Равносторонний треугольник

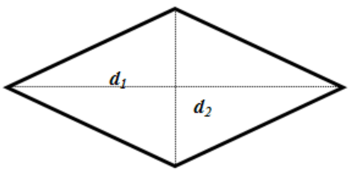
треугольник, у которого все стороны равны.

- Все углы равны 60^0.
- Каждая из высот является одновременно биссектрисой и медианой.
- Центры описанной и вписанной окружностей совпадают.
- Радиусы окружностей: $r=\dfrac{a\sqrt{3}}{6}$; $R=\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$
- Площадь $S=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$

36. Ромб

Параллелограмм, все стороны которого равны называется ромбом.

- ✓ Диагональ ромба является его осью симметрии. Диагонали взаимно перпендикулярны. Диагонали являются биссектрисами углов.
- ✓ Площадь: $S=\dfrac{1}{2}d_1\cdot d_2$

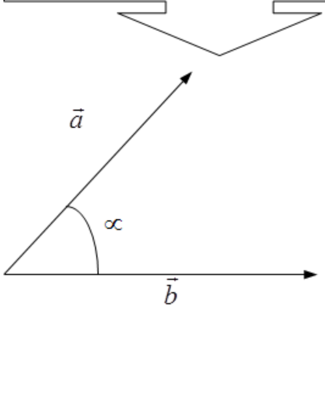


37. Скалярное произведение векторов

Скалярное произведение

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|a|\cdot|b|\cos\alpha$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=x_a x_b+y_a y_b+z_a z_b$$



38. Среднее арифметическое, геометрическое

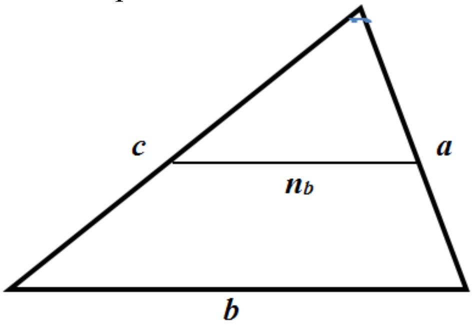
Среднее арифметическое: $\frac{a_1+a_2+a_3+...+a_n}{n}$

Среднее геометрическое: $\sqrt[k]{a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_k}$

39. Средняя линия

Средняя линия – отрезок, соединяющий середины двух сторон треугольника.

- Средняя линия параллельна третьей стороне и равна её половине: $n_b = \frac{1}{2}b$
- Средняя линия отсекает подобный треугольник, площадь которого равна одной четверти от исходного.



40. Степень

Определение

$a^n = a \cdot a \cdot a ... \cdot a$, *если n – натуральное число*

a – основание степени, n - показатель степени

$a^0 = 1$ $\quad$ $a^1 = a$

$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ $\quad$ $a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n}$

Формулы

- $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$
- $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$
- $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$
- $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$

41. Таблица значений тригонометрических функций

Функция	Значения									
	0	0^0	$\frac{\pi}{6}$	30^0	$\frac{\pi}{4}$	45^0	$\frac{\pi}{3}$	60^0	$\frac{\pi}{2}$	90^0
$\cos x$	1		$\frac{\sqrt{3}}{2}$		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		$\frac{1}{2}$		0	
$\sin x$	0		$\frac{1}{2}$		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		$\frac{\sqrt{3}}{2}$		1	
$tg x$	0		$\frac{\sqrt{3}}{3}$		1		$\sqrt{3}$		-	
$ctg x$	-		$\sqrt{3}$		1		$\frac{\sqrt{3}}{3}$		0	

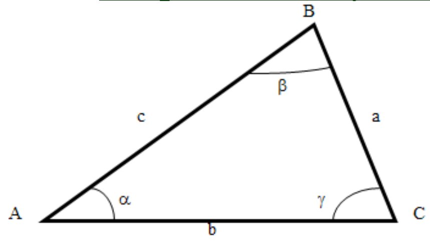
42. Теорема Виета

Приведенное квадратное уравнение: $x^2 + px + q = 0$

$x_1 + x_2 = -p$

$x_1 \cdot x_2 = q$

43. Теорема косинусов, синусов

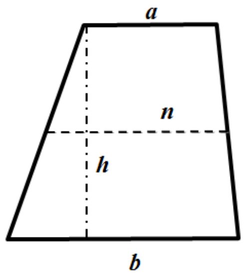


- Теорема косинусов:
  $c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\gamma$
- Теорема синусов:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$$

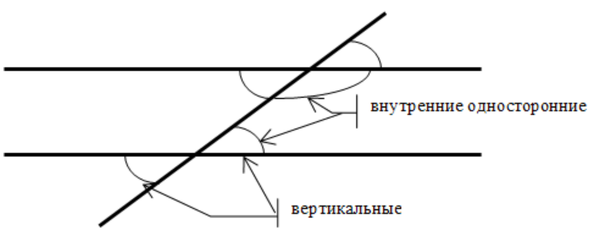
44. Трапеция

Четырёхугольник, у которого две стороны параллельны, а другие не параллельны, называется трапецией.



- ✓ Средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна: $n = \dfrac{a+b}{2}$
- ✓ Площадь: $S = \dfrac{a+b}{2} h = nh$

45. Углы на плоскости



46. Формулы сокращенного умножения

Квадрат суммы $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Квадрат разности $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Разность квадратов $a^2 – b^2 = (a + b)(a – b)$

Куб суммы $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

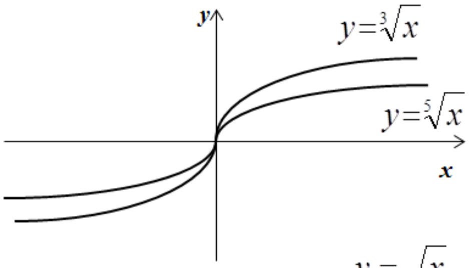
Куб разности $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

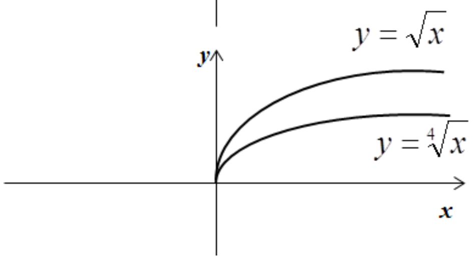
Сумма кубов $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$

Разность кубов $a^3 – b^3 = (a – b)(a^2 + ab + b^2)$

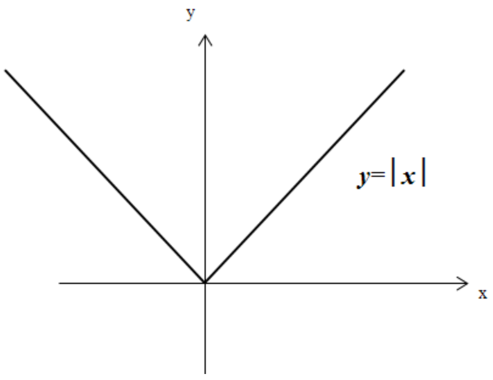
47. Функция корень

$$y = \sqrt[n]{x}$$





48. Функция модуль

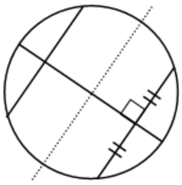


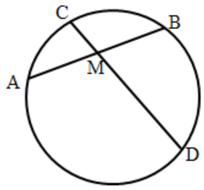
49.Хорда

Хорда – отрезок, соединяющий две точки окружности.

- Диаметр, делящий хорду пополам, перпендикулярен хорде.
- В окружности равные хорды равноудалены от центра окружности.
- Отрезки пересекающихся хорд связаны равенством:

$|AM| \cdot |MB| = |CM| \cdot |MD|$





50.Центральный, вписанный угол